Esame di Ricerca Operativa II del 17/01/2012

Esercizio 1. Supponiamo di avere a disposizione n oggetti e m contenitori. Sappiamo che l'oggetto j pesa p_j kg e occupa un volume di v_j metri cubi. Inoltre il contenitore i ha un costo di utilizzo di c_i euro, ha un volume di V_i metri cubi e non può contenere oggetti che pesano complessivamente più di P_i kg.

Dobbiamo decidere in quali contenitori inserire tutti gli oggetti in modo da minimizzare il costo totale di utilizzo dei contenitori.

1. Scrivere il modello di programmazione lineare intera del problema.
2. Scrivere il file del modello in AMPL.
3. Scrivere il file dei dati in AMPL relativo all'istanza seguente: $n = 8$, $m = 5$,

j	1	2	3	4	5	6	7	8
p_j	50	43	31	79	64	55	91	73
v_j	13	11	9	19	17	21	25	20

i	1	2	3	4	5
P_i	150	200	120	170	150
V_i	52	70	47	45	65
c_i	10	30	20	23	25

Esercizio 2. Si consideri un problema di caricamento a variabili binarie, in cui il contenitore ha capacità 8 ed i valori e pesi degli oggetti sono indicati in tabella:

Oggetti	1	2	3	4
Valori	7	16	10	8
Pesi	2	3	5	6

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo applicando l'algoritmo greedy basato sui rendimenti.

b) Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo risolvendo il rilassamento continuo.

c) Risolvere il problema applicando il metodo *Branch and Bound*. Effettuare la visita dell'albero per ampiezza e in ogni nodo istanziare l'eventuale variabile frazionaria.

d) Supponendo che le variabili siano intere invece che binarie, risolvere il problema applicando l'algoritmo di programmazione dinamica.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Esercizio 3. Si consideri il problema di *scheduling* $1|r_j|L_{max}$ con i seguenti dati:

j	1	2	3	4
r_j	4	6	2	3
p_j	5	3	6	4
d_j	9	13	11	10

a) Calcolare una valutazione inferiore del valore ottimo risolvendo il problema $1|r_j, prmp|L_{max}$.

b) Trovare due soluzioni ammissibili applicando le regole EDD e ERT. Calcolare una valutazione superiore del valore ottimo scegliendo la migliore soluzione ammissibile tra le due trovate.

c) Risolvere il problema applicando il metodo *Branch and Bound*.

Esercizio 4. Si consideri il seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{cases} \min\ 13\,x_1 + 5\,x_2 \\ 15\,x_1 + 7\,x_2 \geq 57 \\ 11\,x_1 + 17\,x_2 \geq 51 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a) Disegnare l'insieme $\text{conv}(\Omega)$, dove Ω indica la regione ammissibile del problema.

b) Risolvere graficamente il rilassamento continuo.

c) Calcolare un taglio di Gomory.

Esercizio 5. Si consideri il problema del TSP simmetrico su un grafo con n nodi.

a) Scrivere un modello di PLI del problema.

b) Descrivere il problema dell'r-albero di costo minimo e spiegare quale relazione ha con il TSP simmetrico. Calcolare il 3-albero di costo minimo relativamente all'istanza in cui $n = 5$ ed i costi degli archi sono:

nodi	**2**	**3**	**4**	**5**
1	32	29	30	34
2		16	26	28
3			14	26
4				27

c) Descrivere il rilassamento lagrangiano del TSP simmetrico. Risolvere il rilassamento lagrangiano relativo all'istanza precedente ponendo il vettore dei moltiplicatori $\lambda = (-1, 0, 0, 2, -1)$.

d) Descrivere l'algoritmo del nodo più vicino per il TSP simmetrico. Applicare tale algoritmo all'istanza precedente partendo dal nodo 4.

e) Descrivere l'algoritmo dell'albero per il TSP simmetrico. Applicare tale algoritmo all'istanza precedente.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

a) Variabili: $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } j \text{ è inserito nel contenitore } i, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$ $y_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ è usato,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$

Modello:

$$\min \sum_{i=1}^{m} c_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad \forall\, j = 1, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_{ij} \le P_i y_i \quad \forall\, i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_j x_{ij} \le V_i y_i \quad \forall\, i = 1, \ldots, m$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall\, i, j$$

$$y_i \in \{0,1\} \qquad \forall\, i$$

b) `# file del modello`

```
param n >=0; param m >=0;
param p{1..n} >=0; param v{1..n} >=0;
param P{1..m} >=0; param V{1..m} >=0; param c{1..m} >=0;

var x{1..m,1..n} binary;
var y{1..m} binary;

minimize costo: sum{i in 1..m} c[i]*y[i];

s.t. assegnamento{j in 1..n}: sum{i in 1..m} x[i,j] = 1;

s.t. peso{i in 1..m}: sum{j in 1..n} p[j]*x[i,j] <= P[i]*y[i];

s.t. volume{i in 1..m}: sum{j in 1..n} v[j]*x[i,j] <= V[i]*y[i];
```

c) `# file dei dati`

```
param n := 8; param m := 5;

param p := 1 50, 2 43, 3 31, 4 79, 5 64, 6 55, 7 91, 8 73;
param v := 1 13, 2 11, 3  9, 4 19, 5 17, 6 21, 7 25, 8 20;

param P := 1 150, 2 200, 3 120, 4 170, 5 150;
param V := 1  52, 2  70, 3  47, 4  45, 5  65;
param c := 1  10, 2  30, 3  20, 4  23, 5  25;
```

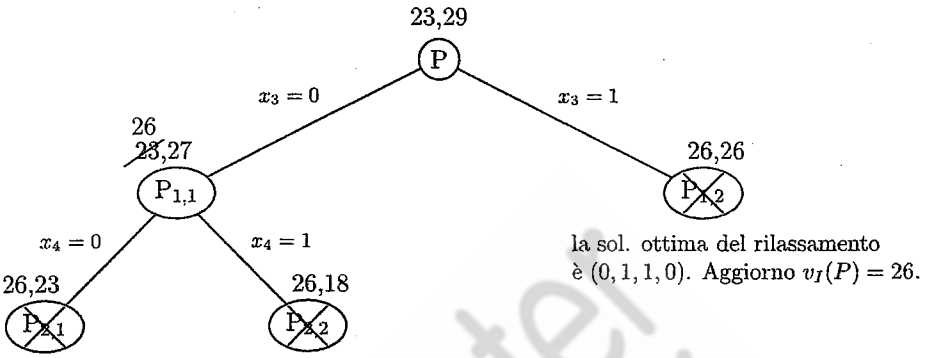
master COPY COPISTERIA 050/8312176 388/9837745

Esercizio 2.

a) sol. ammissibile $= (1,1,0,0)$, $v_I(P) = 23$.

b) sol. ottima del rilassamento $= \left(1,1,\frac{3}{5},0\right)$, $v_S(P) = 29$.

c) Branch and Bound:



la sol. ottima del rilassamento è $(0,1,1,0)$. Aggiorno $v_I(P) = 26$.

soluzione ottima $= (0,1,1,0)$ valore ottimo $= 26$

d) Programmazione dinamica:

$u=$

$E \backslash i$	1	2	3	4
0	0	0	0	
1	0	0	0	
2	(1)	0	0	
3	1	1	0	
4	2	1	0	
5	2	1	0	
6	3	2	0	
7	3	2	0	
8	4	(2)	(0)	(0)

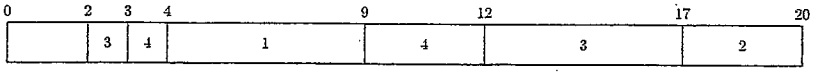
$v=$

$E \backslash i$	1	2	3	4
0	0	0	0	
1	0	0	0	
2	7	7	7	
3	7	16	16	
4	14	16	16	
5	14	23	23	
6	21	32	32	
7	21	32	32	
8	28	39	39	(39)

soluzione ottima $= (1,2,0,0)$ valore ottimo $= 39$

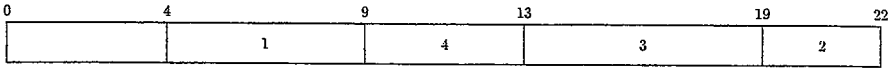
Esercizio 3.

a) Soluzione ottima del rilassamento:



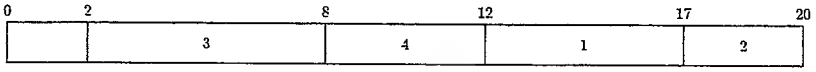
$L = (0, 7, 6, 2)$, quindi $v_I(P) = 7$.

b) Regola EDD:



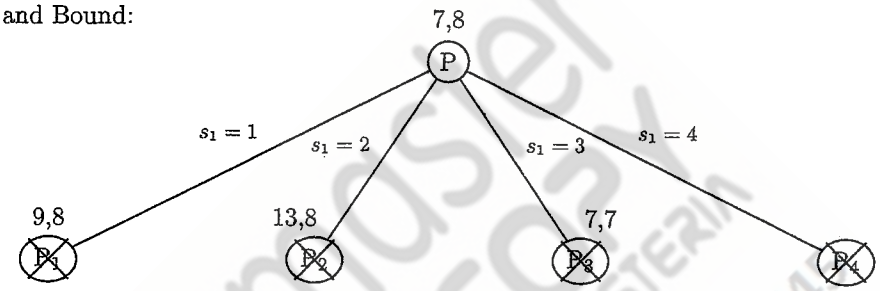
$L = (0, 9, 8, 3)$, quindi $v_S(P) = 9$.

Regola ERT:

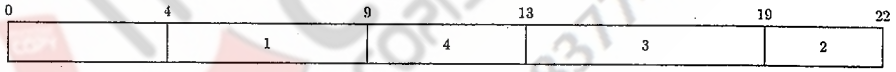


$L = (8, 7, -3, 2)$, quindi $v_S(P) = 8$.

c) Branch and Bound:

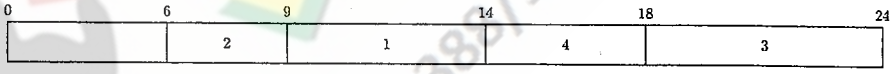


Sol. ott. rilas. di P_1:



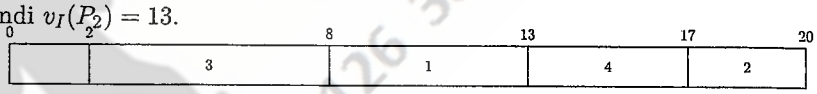
$L = (0, 9, 8, 3)$, quindi $v_I(P_1) = 9$.

Sol. ott. rilas. di P_2:



$L = (5, -4, 13, 8)$, quindi $v_I(P_2) = 13$.

Sol. ott. rilas. di P_3:



$L = (4, 7, -3, 7)$ e $v_I(P_3) = 7$. La soluzione è ammissibile, quindi aggiorno $v_S(P) = 7$. Poiché $v_I(P) = 7$ si può chiudere anche P_4 senza risolvere il suo rilassamento.

La sequenza ottima è 3-1-4-2 di valore 7.

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745